

## Przykładowe zadania na sprawdzian z geometrii analitycznej

1. Punkty  $A(-3, -3)$ ,  $B(2, 1)$  i  $C(3, -5)$  są wierzchołkami trójkąta  $ABC$ .

- Oblicz cosinus największego kąta w tym trójkącie.
- Oblicz wysokość tego trójkąta poprowadzoną na bok  $AC$ .

2. Do wykresu funkcji  $f(x) = x^2 - 12x + 32$  poprowadzono w punkcie  $P$  styczną, która jest prostopadła do prostej  $l: 3x - 6y + 1 = 0$ .

- Wyznacz równanie tej stycznej.
- Oblicz pole trójkąta ograniczonego przez tę styczną oraz obie osie układu współrzędnych.

3. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ), dla których wektory  $\vec{u} = [a^2, 5a + 4]$  i  $\vec{v} = [a - 1, -2]$  są prostopadłe. Dla najmniejszej wyznaczonej wartości parametru  $a$  napisz równanie prostej prostopadłej do wektora  $\vec{v} - \vec{u}$  i przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

4. Punkty  $A(-2, -4)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(1, 5)$  są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ . Wyznacz:

- równania prostych zawierających boki  $AB$  i  $CD$ ,
- długość wysokości opuszczonej z punktu  $C$  na bok  $AB$ ,
- pole równoległoboku.

5. Punkty  $A(-1, -3)$  i  $B(-3, -1)$  leżą na hiperboli o równaniu  $y = \frac{3}{x}$ , gdzie  $x \neq 0$ . Znajdź na tej hiperboli taki punkt  $C$  o dodatniej odciętej, aby pole trójkąta  $ABC$  było najmniejsze.

6. Wyznacz te wartości parametru  $m$  ( $m \in \mathbf{R}$ ), dla których okręgi:  $o_1: (x - 3)^2 + (y - m)^2 = 2$  oraz  $o_2: x^2 + y^2 - 2mx - 6y + 9 - m^2 = 0$  są rozłączne zewnętrznymi.

7. Dla jakich wartości parametru  $m$  ( $m \in \mathbf{R}$ ) okręgi  $o_1: (x - m)^2 + (y + 4)^2 = 8$  oraz  $o_2: (x - 2)^2 + (y + m)^2 = 2$  są wewnętrznymi stycznymi? Oblicz współrzędne punktu styczności.

8. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$  ( $m \in \mathbf{R}$ ), dla których równanie

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - m^2 - 2m + 13 = 0$$
 opisuje okrąg.

9. Prosta  $k$  jest styczna do okręgu o równaniu  $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 11 = 0$  w punkcie  $A(-2, -1)$ . Wyznacz równanie prostej  $k$ .

10. W prostokątnym układzie współrzędnych zilustruj zbiory  $A$ ,  $B$  oraz  $A - B$ , jeśli

$$A = \{(x, y): x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 \leq 0\}$$
 oraz

$$B = \{(x, y): x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge (x - 4)^2 + (y + 4)^2 \leq 9\}.$$

11. Oblicz odległość punktu  $P(1, -3)$  od prostej, do której należą punkty wspólne okręgów o równaniach  $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 16 = 0$  oraz  $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ .

12. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ , gdzie  $A(-2, 3)$ ,  $B(-4, 5)$ ,  $C(3, 8)$ .

13. a) Wyznacz współrzędne punktu  $P$ , którego obrazem w jednokładności o środku w punkcie  $S = (1, 4)$  i skali  $s = -3$  jest punkt  $P' = (5, 3)$ .

b) Napisz równanie obrazu paraboli  $y = -x^2 + 1$  w jednokładności o środku  $S = (0, 0)$  i skali  $s = 5$ .

c) Znajdź współrzędne środka jednokładności o skali  $k = 2$ , w której obrazem punktu  $A = (-2, 0)$  jest punkt

$$A' = (-5, 1).$$

14. Dany jest okrąg o środku  $S = (2, 1)$  i promieniu  $r = 2$ . Okrąg ten przekształcono przez jednokładność o środku  $O$  i skali  $k$  otrzymując okrąg  $(x - 2)^2 + (y + 6,5)^2 = 1$ . Wyznacz Współrzędne punktu  $O$  i skalę tej jednokładności.

15. Sprawdź, czy odcinki  $AB$  i  $CD$ , gdzie  $A(2, -3)$ ,  $B(5, 6)$ ,  $C(0, -1)$ ,  $D(1, 2)$ . Jeśli tak, to wyznacz środek  $S$  i skalę  $k$  jednokładności, w której obrazem odcinka  $AB$  jest odcinek  $CD$ .

16. Środkiem boku  $BC$  trójkąta  $ABC$  jest punkt  $R(5, -1)$ . Wiedząc, że  $\vec{AB} = [-5, -18]$  i  $\vec{AR} = [3, -12]$ , wyznacz:

- współrzędne wierzchołków trójkąta  $ABC$ ;
- długość boku  $BC$ .

17. Dwa boki równoległoboku zawierają się w prostych o równaniach  $x - y + 1 = 0$ ,  $3x + 2y - 12 = 0$ . Punkt  $P = (6; 4)$  jest punktem przecięcia się przekątnych równoległoboku. Napisz równanie prostych zawierających pozostałe boki. Wyznacz współrzędne wierzchołków równoległoboku i oblicz jego pole.

18. Pole trójkąta o wierzchołkach  $A(-5, -1)$ ,  $B(0, -3)$  jest równe 12. Oblicz współrzędne trzeciego wierzchołka, wiedząc, że należy on do prostej o równaniu  $y = 2x + 3$ .

19. Dany jest okrąg  $o_1$  o równaniu  $x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$  oraz okrąg  $o_2$  o równaniu  $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 27 = 0$ . Oblicz współrzędne środka jednokładności i skalę jednokładności, w której obrazem okręgu  $o_1$  jest okrąg  $o_2$ .

20. Dane są dwa punkty  $A(0, 4)$  oraz  $B(3, -2)$ .

- Oblicz współrzędne punktu  $P$  przecięcia prostej  $AB$  z osią  $OX$ .
- Wyznacz na dodatniej półosi  $OX$  punkt  $C$ , dla którego pole trójkąta  $ABC$  jest równe 12.

21. Prosta o równaniu  $y = x + 1$  przecina parabolę o równaniu  $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2$  w punktach  $A$  i  $B$ . Napisz równanie okręgu, którego środek leży na prostej  $y = 2x - 4$  i który przechodzi przez punkty  $A$  i  $B$ .

22. Pole trójkąta o wierzchołkach  $A(-4, 4)$ ,  $B(1, 6)$  jest równe 1,5. Oblicz współrzędne trzeciego wierzchołka, wiedząc, że należy on do prostej o równaniu  $x - y - 1 = 0$ .

23. W trójkącie  $ABC$  dane są:  $A(-7, -1)$ ,  $B(5, 1)$  oraz  $\vec{BD} = [-9, 1]$ , gdzie  $D$  to środek boku  $AC$ .

- Oblicz długość środkowej  $BD$ .
- Oblicz współrzędne wierzchołka  $C$ .
- Oblicz współrzędne punktu  $E$  tak, aby figura  $ABCE$  była równoległobokiem.

24. Napisz równania stycznych do okręgu  $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 28 = 0$  i prostopadłych do prostej  $k$  o równaniu  $y = -\frac{1}{2}x$ .

25. Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $A(-3, 1)$ ,  $\vec{AB} = [5, 3]$ , a środek ciężkości ma współrzędne  $S(-1, -1)$ . Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków trójkąta.