

Zadania na dowodzenie

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a, b \geq 0$:

a) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ b) $a + \frac{b}{4} \geq \sqrt{ab}$

2. Wykaż, że dla dowolnych $a \in R_+$ i $b \in R_+$ zachodzi nierówność:

a) $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$ b) $\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4$

3. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b takich, że $ab > 0$, prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

4. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność:

a) $a^2 \geq 4b(a - b)$ b) $a(6b - 7a) \leq 2(b - a)(b + a)$

c) $a^2 + b^2 \geq 2(a - b - 1)$ d) $a^2 + b^2 \geq 4(a + b - 2)$

5. Wykaż, że nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x :

a) $(2x + 1)^2 \geq 8x$ b) $x(x + 12) \geq 9(2x - 1)$ c) $\frac{4}{x^2 + 1} \geq 3 - x^2$

6. Wykaż, że liczba $9 - 4\sqrt{5}$ jest liczbą odwrotną do $9 + 4\sqrt{5}$.

7. Uzasadnij, że liczby $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ i $1 - \sqrt{2}$ są liczbami przeciwnymi.

8. Uzasadnij, że liczba $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ jest wymierna.

9. Uzasadnij, że liczba $\frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ jest wymierna.

10. Uzasadnij, że liczba $7^{77} - 6 \cdot 7^{76} + 12 \cdot 7^{75}$ jest podzielna przez 19.

11. Uzasadnij, że liczba $8^5 + 4^8 + 6 \cdot 16^4$ jest podzielna przez 5.

12. Uzasadnij, że liczba $32^{32} - 5^{64}$ jest podzielna przez 7.

13. Uzasadnij, że liczba $17^8 - 6^8$ jest podzielna przez 11 i 23.

14. Wykaż, że liczba $4^9 + 3^9$ jest podzielna przez 91.

15. Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 9.

16. Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych jest liczbą podzielną przez 4.

17. Wykaż, że reszta z dzielenia sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych przez 3 jest równa 2.

18. Wykaż, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest liczbą parzystą, która przy dzieleniu przez 8 daje resztę 2.

19. Wykaż, że jeżeli przy dzieleniu przez 7 jedna liczba daje resztę 3, a druga resztę 4, to iloczyn tych liczb daje przy dzieleniu przez 7 resztę 5.

20. Wykaż, że kwadrat liczby całkowitej dającej z dzielenia przez 3 resztę 2, przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.